Centre Des Classes Préparatoires Lydex -BENGUERIR-

Document n°1 Matrice : résumé de cours, exercices corrigés, techniques

a.EZZINE@lydex.ma

1 Calcul matriciel

1. **combinaison linéaires de deux matrices.**
   Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on note $\lambda A + \mu B$ la matrice :
   $$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} + \mu b_{11} & \cdots & \lambda a_{1p} + \mu b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} + \mu b_{n1} & \cdots & \lambda a_{np} + \mu b_{np} \end{pmatrix}$$
2. **Produit de deux matrices.**
   Pour tous $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on note $A \times B$ ou AB la matrice de $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ définie par $\forall (i,j) \in \{1, \cdots, p\} \times \{1, \cdots, r\} \quad [AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}$
3. **Propriétés du produit matriciel.**
   Le produit matriciel est associatif, bilinéaire admet $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ comme élément neutre.
4. **Transposée.**
   - **définition :** Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
     On appelle transposée de A la matrice de $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ notée $A^\top$ ou ${}^{\mathrm{t}}A$ définie par $\forall (i,j) \in \{1, \cdots, p\} \times \{1, \cdots, n\} \quad [A]_{i,j}^{t} = a_{j,i}$.
   - **Propriétés**
     - Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: ${}^{\mathrm{t}}(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^{\mathrm{t}}A + \mu {}^{\mathrm{t}}B$.
     - Pour tous $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: ${}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}A) = A$
     - Pour tous $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$: ${}^{\mathrm{t}}(AB) = {}^{\mathrm{t}}B {}^{\mathrm{t}}A$.
5. **Trace d'une matrice.**
   - **Définition.** Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors on appelle trace de A, et on note $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \in \mathbb{K}$.
     C'est la somme des coefficients diagonaux de A.
   - **Propriétés .**
     - La trace est une forme linéaire.
     - $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \quad Tr(AB) = Tr(BA)$.
     - On n'a pas $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A) \times \operatorname{tr}(B)$ Par exemple,
     $$\operatorname{tr}\left(I_n^2\right) = n \neq \operatorname{tr}\left(I_n\right)^2 = n^2$$
6. **Matrices carrées remarquables :**
   - **Définitions :**
     Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que A est :

– **triangulaire supérieure** si $\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2, \quad i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

– **triangulaire inférieure** si $\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2, \quad i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

– **diagonale** si elle est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure, c'est-à-dire si $\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2, \quad i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$
C'est donc une matrice dont les seuls coefficients qui peuvent être non nuls sont sur la diagonale. Pour $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on note $\operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la matrice dont les coeffi- cients diagonaux sont (dans cet ordre) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

$$\text{Autrement dit}, \operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

– **scalaire** si elle est diagonale, et que tous ses coefficients sont égaux.

- **Propriétés :**
  – Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaires supérieures (resp. inférieures) et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Les matrices $\lambda A + \mu B$ et AB sont alors triangulaires supérieures (resp. inférieures). En outre, $\forall i \in \{1, \cdots n\}: \qquad [AB]_{ii} = a_{ii} b_{ii}$.
  – Soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n), (\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$. Alors :

$$\operatorname{Diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \times \operatorname{Diag}(\beta, \cdots, \beta) = \operatorname{Diag}(\alpha_1\beta_1, \cdots, \alpha_n\beta_n)$$

7. **Multiplication par une ligne/une colonne.**
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$

- Si E_j est la matrice de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception *du* $j^{\text{ème}}$ qui vaut 1, alors AE_j est égal à C_j : la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.
Plus généralement, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, on a $AX = x_1C_1 + x_2C_2 + \cdots + x_pC_p$.
(C_i est $i^{\text{ème}}$ colonne de A)
- De même, si E_i est la matrice de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ dont seul le coefficient de la i $^{\text{ime}}$ ligne est le seul non nul, alors $E_iA = L_i$, la i $^{\text{ème}}$ ligne de A.
- La j^{me} colonne de AB est AC_j avec C_j est la j^{me} colonne de B. En d'autre termes si on pose $B = (C_1 \cdots C_q)$ alors $AB = (AC_1 \cdots AC_q)$.
- La i^{me} ligne de AB est L_iB avec L_i est la i^{me} ligne de A. En d'autre terme Si on pose $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$
alors $AB = \begin{pmatrix} L_1B \\ \vdots \\ L_nB \end{pmatrix}$

8. **Matrice inversible :** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}
A \text{ est inversible} &\iff \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ tel que } AB = I_n & (1)\\
&\iff \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ tel que } BA = I_n & (2)\\
&\iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad (AX = 0 \implies X = 0) & (3)\\
&\iff \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad \exists! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = Y. & (4)\\
&\iff \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = Y. & (5)\\
&\iff det(A) \neq 0 & (6)\\
&\iff rg(A) = n & (7)
\end{aligned}$$

2 Matrices et applications linéaires

Dans cette partie, on considère deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels E et F de dimension finie, et sauf mention explicite du contraire, on note $p = \dim E$ et $n = \dim F$.

1. **Définition (matrice d'une application linéaire dans des bases).**
   Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, soit $\mathcal{C} = (x_1, \ldots, x_n)$ une base de F, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ (plus souvent appelée matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$) la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ telle que

$$\forall j \in \{1, \cdots, p\} f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_i$$

   Pour le dire autrement, les coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ sont les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

   Dans le cas où $E = F$, c'est-à-dire lorsque f est un endomorphisme de E, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ au lieu de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$. Il s'agit alors d'une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $n = \dim E$

2. **Définition (matrice d'une famille de vecteurs dans une base).**
   Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et soient $x_1, \ldots, x_p$ des vecteurs de E. On appelle matrice de la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ dans la base $\mathcal{B}$, et on note $\mathrm{Mat}_{\beta}(x_1, \ldots, x_p)$ la matrice $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ où

$$\forall j \in \{1, \cdots, p\}, \quad x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$$

   Autrement dit, la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_p)$ est le vecteur des coordonnées de x_j dans la base $\mathcal{B}$.

3. **Compatibilité des opérations.**
   - Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F. Alors pour $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda f + g) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$$

     aussi l'application $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est bijective,autrement dit un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
   - Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases respectives de E et F, soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et soit $x \in E$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

   - Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$. Alors pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$$

   - Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension n, de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ Alors f est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},C}(f)$ est inversible. Et dans ce cas,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\right)^{-1}$$

4. **Application linéaire canoniquement associée à une matrice.**
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension respectivement p et n, on note $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F . L'application $f \mapsto Mat_{B,C}(f)$ est un isomorphisme de $L(E,F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors pour E, F, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ fixés on a : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \exists! f \in L(E,F), \quad Mat_{B,C}(f) = A$.
En particulier, si $E = \mathbf{K}^p$ et $F = \mathbf{K}^n$ (resp. $E = M_{p,1}(\mathbb{K})$ et $F = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$), munis de leurs bases canoniques, alors l'unique $f \in L(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ (resp. $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ dont la matrice dans les bases canoniques est A est appelée application canoniquement associée à A.

   - Cas où $E = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), F = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$: l'application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associée à A est $f_A :\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}\right.$.

5. **Rang d'une matrice.**

   - Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, et soient $C_1, \ldots, C_p$ ses colonnes, qui sont donc dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On appelle rang de A et on note $\operatorname{rg}(A)$ le rang de la famille $(C_1, \ldots, C_p)$ Autrement dit, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{dim} \operatorname{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$
   - Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, soit $\mathcal{B}$ une base de E et soient $x_1, \ldots, x_p$ des vecteurs de E. Alors $\operatorname{rg}(x_1, \ldots, x_p) = \operatorname{rg} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_p)$
   - Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, et soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases respectives de E et F. Alors $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f))$
   - Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\operatorname{rg}(A) \leqslant \min(n,p)$
   - Multiplier une matrice à gauche ou à droite par une matrice inversible ne change pas son rang.

6. **Image noyau d'une matrice.**

   - **Définition.** Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle alors
     - **noyau de** A l'ensemble $\operatorname{Ker} A = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\}$
     - **image de** A l'ensemble $\operatorname{Im} A = \{AX, \quad X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\} \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
   - $\operatorname{Im} A = vect(C_1, \cdots, C_n)$ avec C_i est la i^{eme} colonne de A.
   - **Théorème du rang matriciel** : Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\operatorname{dim} \operatorname{Ker} A + \operatorname{rg} A = p$

3 Techniques, Applications.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est nilpotente si $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$ le plus petit entier qui vérifié $A^p = 0$ est appelé l'indice de nilpotence.

1. **Calcul de puissance d'une matrice :**

   - **Technique n°1 : Décomposition en une matrice scalaire et une matrice nilpotente.**
   Soit A une matrice triangulaire d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ on suppose que les éléments de la diagonale de A sont tous égaux et on note α leur valeur commune, alors $T = A - \alpha I_n$ est une matrice triangulaire stricte c-à-d de triangulaire de diagonale nul. on admet que tout matrice triangulaire stricte d'ordre n est nilpotente d'indice inférieure ou égale à n.
   on note p l'indice de nilpotence de T ona $A = \alpha I_n + T$ et αI_n et T donc j'ai le droit d'appliquer binome de Newton. $\forall m \in \mathbb{N}, \quad A^m = \sum_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} T^k \alpha^{m-k}$
   on a $\forall m \geqslant p, \quad T^m = 0$, donc $\forall m \geqslant p, \quad A^m = \sum_{k=0}^{p} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} T^k \alpha^{m-k}$

   Exemple :

   Calculons A^n pour $n \in \mathbb{N}$ avec $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Notons $D = 3I_3$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $A = D + T$, et D et T commutent puisqu'une matrice scalaire commute toujours à toute matrice. On a T est une alors $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $T^3 = 0$. Donc par la formule du binôme de Newton, il vient, pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} T^k D^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{2} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} T^k 3^{n-k} \\ &= 3^n I_3 + 3^{n-1} nT + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} T^2 \\ &= \begin{pmatrix} 3^n & 3^{n-1}n & n3^n + 2n(n-1)3^{n-2} \\ 0 & 3^n & n3^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- **Technique n°2 : Cas où $A^2 \in \mathbf{Vect}(A, I_n)$.**
  on suppose que $A^2 \in \mathbf{Vect}(A, I_n)$ c-à-d $\exists(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{K}^2, \quad A^2 = \alpha_0 A + \beta_0 I_n$.
  Alors $\forall m \in \mathbb{N}, \quad A^m \in \mathbf{Vect}(A, I_n)$ c-à-d $\forall m \in \mathbb{N}, \quad \exists(\alpha_m, \beta_m) \in \mathbb{K}^2, \quad A^m = \alpha_m A + \beta_m I_m$.
  Preuve : on peut montrer ce résultat simplement par une récurrence simple.
  Pour $m = 0$ le résultat est evident $A^0 = I_n \in \mathbf{Vect}(A, I_n)$.
  Soit $m \in \mathbb{N}$ on suppose le résultat est vrai pour m est montrons le pour $m + 1$.
  on a $A^{m+1} = A \times A^m = A(\alpha_m A + \beta_m I_n) = \alpha_m A^2 + \beta_m A = (\alpha_m \alpha_0 + \beta_m)A + \alpha_m \beta_0 I_n$
  Si on pose $\alpha_{m+1} = \alpha_m \alpha_0 + \beta_m$ et $\beta_{m+1} = \alpha_m \beta_0$ alors $A^{m+1} = \alpha_{m+1} A + \beta_{m+1} I_n$. D'où le résultat pour $m + 1$.
  Si on peut trouver les deux suites $(\alpha_m)_m$ et $(\beta_m)_m$ le problème est résolue.

  Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 2\cos(\theta) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, avec $\theta \in]0, \pi[$.

  - On peut montrer facilement que $A^2 = 2\cos(\theta)A - I_2$.
  - On suivre le même procédure que dans la présentation de cette méthode on montre que qu'il existe deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = a_n A + b_n I_2$ avec $a_{n+1} = 2\cos(\theta)a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -a_n$.
  - Soit $n \in \mathbb{N}$.
    On a $a_{n+2} = 2\cos(\theta)a_{n+1} + b_{n+1} = 2\cos(\theta)a_{n+1} - a_n$ donc (a_n) est linéaire récurrente d'ordre 2. déterminant l'expression de $(a_n)_n$.

    La suite (a_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2, et son équation caractéristique est $r^2 - 2\cos(\theta)r + 1 = 0$, de discriminant $\Delta) \, 4\cos^2(\theta) - 4 = -4\sin^2\theta < 0$ Donc l'équation possède deux racines complexes conjuguées, qui sont

    $$r_1 = \frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = e^{i\theta} \text{ et } r_2 = \overline{r_1} = e^{-i\theta}$$

    Donc il existe deux réels λ et μ tels que

    $$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)$$

    Or, $a_0 = \lambda = 0$ et $a_1 = \mu\sin(\theta) = 1$. Donc $a_n = \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$.
  - On en déduit que

    $$A^n = \begin{pmatrix} 2a_n\cos\theta + b_n & -a_n \\ a_n & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & -a_n \\ a_n & b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\theta}\begin{pmatrix} \sin((n+1)\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & -\sin((n-1)\theta) \end{pmatrix}$$

- **Par fois c'est mieux de travail sur l'endomorohisme associé !**
  Traitons par exemple cet question posé en X-polytechnique 2013 math 1 MP.

  Soit $a \in \mathbb{C}$. on pose $G_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculons G_a^n.

  Soit $f \in L(\mathbb{C})$ l'endomorphisme canoniquement associé à G_a, si on note $(e_1, \cdots e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ on remarque que $f(e_n) = ae_1$ et $\forall i \in \{1, \cdots, n-1\} \quad f(e_i) = e_{i+1}$.
  puis on peut remarquer que $f^j(e_i) = e_{i+j}$ tant que $i + j \leqslant n$ et que si $i + j = n + 1$ alors $f^j(e_i) =$

$f(f^{j-1}(e_i)) = f(e_n) = ae_n$ ect...
reste à remarquer que $\forall(i,j) \in \{1,\cdots,n\}^2 \quad f^j(e_i) = e_{i+j}$ si $i+j \leqslant n$ et que $f^j(e_i) = ae_{i+j-n}$ sinon . Montrons ça par récurrence sur j.
Soit $i \in \{1,\cdots,n\}$.

- Pour $j=1$, Si $i=n$ alors $f(e_i) = ae_n = ae_{i+j-n}$.
  Si $i \in \{1,\cdots,n-1\}$ alors $f(e_i) = e_{i+1} = e_{i+j}$ donc on ale résultat.
- Soit $j \in \{1,\cdots,n-1\}$ supposons le résultat vrai pour j.

  * Si $i+j<n$ alors $f^{j+1}(e_i) = f(e_{i+j}) = e_{i+j+1}$.
  * Si $i+j=n$ alors $f^{j+1}(e_i) = f(e_{i+j}) = f(e_n) = ae_1 = ae_{i+j+1-n}$.
  * Si $i+j>n$ alors $f^{j+1}(e_i) = f(ae_{i+j-n})$ on a $i+j-n \leqslant n$ donc $f^{j+1}(e_i) = af(e_{i+j-n}) = ae_{i+j+1-n}$

  d'où le résultat pour $j+1$.

Appliquant ce résultat pour $j=n$.
On a $\forall i \in \{1,\cdots,n\}$ $n+i>n$ donc $f^n(e_i) = ae_{n+i-n} = ae_i$ d'où $f^n = aid_{\mathbb{C}^n}$, ce qui implique que $G_a^n = aI_n$

2. **Exercices :**

(a) **Exercice 1 :** Montrer qu'il n'existe pas de couple $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $AB - BA = I_n$

Correction :

Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ on a $Tr(AB-BA) = Tr(AB) - Tr(BA) = Tr(AB) - Tr(AB) = 0$ et on a $Tr(I_n) = n \neq 0$ donc un tel couple n'existe pas.

(b) **Exercice 2 :** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}({}^tAA) = 0$ si et seulement si $A = 0$.

Correction :

Il est évident que si A est la matrice nulle, alors $\operatorname{Tr}({}^tAA) = 0$ D'autre part, pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left({}^tAA\right) &= \sum_{i=1}^n \left[{}^tAA\right]_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[{}^tA\right]_{i,j} [A]_{j,i} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i} a_{j,i} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{j,i}^2\end{aligned}$$

Et donc $\operatorname{tr}({}^tAA) = 0$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{j,i}^2 = 0$. Mais une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chacun de ces nombres est nul, donc $\operatorname{tr}({}^tAA) = 0$ si et seulement si $\forall(i,j) \in \{1,\cdots,n\}^2, a_{j,i} = 0$ Soit si et seulement si A est la matrice nulle.

(c) **Exercice 3 :** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM)$. Montrer que $A = B$.

Correction

Il s'agit d'utiliser les matrices élémentaires.
Soient donc $(i,j) \in \{1,\cdots,n\}$. Alors toutes les colonnes de $AE_{i,j}$ sont nulles à l'exception de la $j^{\text{ème}}$ (n'oubliez pas que les colonnes de $AE_{i,j}$ sont A fois les colonnes de $E_{i,j}$ est vue que tous les colonnes de $E_{i,j}$ sont nulles sauf la $j^{\text{ème}}$ alors tous les colonnes de $AE_{i,j}$ sont nulles sauf la $j^{\text{ème}}$).
Et le coefficient diagonal de cette j^{jme} colonne est

$$[AE_{i,j}]_{j,j} = \sum_{k=1}^n A_{j,k} [E_{i,j}]_{k,j} = a_{j,i}$$

Et par conséquent, $\operatorname{tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$. De même, on a $\operatorname{tr}(BE_{i,j}) = b_{j,i}$ Ces deux traces étant égales par hypothèse, on a donc, pour tout $(i,j) \in \{1,\cdots,n\}^2, a_{j,i} = b_{j,i}$, et donc $A = B$.

(d) **Exercice 4 : Théorème d'Hadamard sur les matrices à diagonale dominante**

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in \{1,n\}, |a_{i,i}| > \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$, et soit $i_0 \in \{t1,n\}$ tel que $|x_{i_0}| = \max_i |x_i|$. Montrer que $x_{i_0} = 0$, et en déduire que A

est inversible.

Correction.

Puisque $AX = 0$, alors tous les coefficients de AX sont nuls, et en particulier, le i_0 ème coefficient de AX est nul. Soit encore $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}x_j = 0$

En isolant le coefficient diagonal de la i_0 ème ligne de A, on a donc $a_{i_0,i_0}x_{i_0} = -\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} a_{i_0,j}x_j$. En passant à la valeur absolue, l'inégalité triangulaire nous donne alors

$$|a_{i_0,i_0}| \cdot |x_{i_0}| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} a_{i_0,j}| \cdot |x_j \Bigg| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} \Bigg| a_{i_0,j}| \cdot |x_{i_0}\ |$$

Si $x_{i_0} \neq 0$, alors, en divisant par $|x_{i_0}|$, il vient $|a_{i_0,i_0}| \leqslant \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}|$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur A. Donc $x_{i_0} = 0$. Ceci implique alors que tous les coefficients de X soient nuls, et donc que $X = 0$ Autrement dit, nous avons prouvé que $AX = 0 \Rightarrow X = 0$, ce qui est une des caractérisations de l'inversibilité.